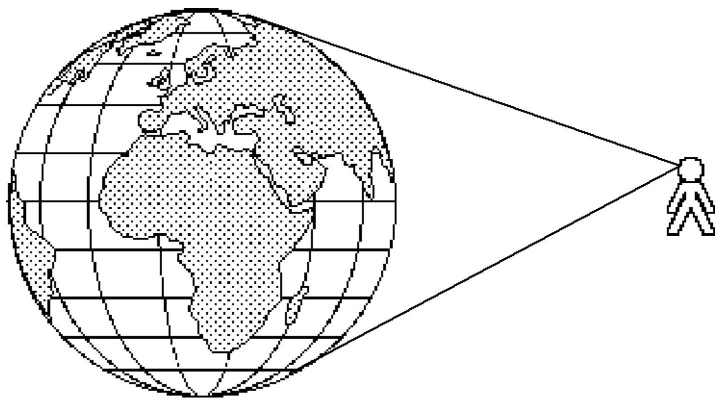
«Mi pereza no me deja tiempo libre para nada»

Escritor

4 MAT I



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

ÍNDICE:

MATERIAL

Puzzle: cuadrado…
Escuadra, cartabón, goniómetro.
Puntero láser.
Globo terráqueo.
Brújula.
Abanico.
Varillas articuladas.
Cinta métrica. Teodolito.
Noria. Función seno.
Mira.
Cuadrante y otros enredos.

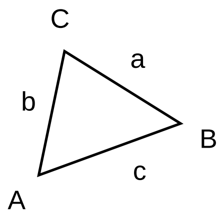
1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0º A 90º)

TRIGONOMETRÍA –PARA COMENTARIOS. NO DAR AL PRINCIPIO-

Es la parte de la matemática que estudia las relaciones métricas en un triángulo. TRIGONOS (triángulo), METRIA (medida). Entre los lados y los ángulos. Las dos medidas de un triángulo.

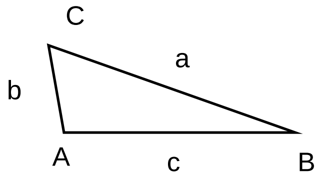
El triángulo es la figura plana elemental.

En el triángulo, como en toda figura geométrica intervienen dos tipos de magnitudes:



Dentro de un triángulo tenemos dos magnitudes. Una para medir los lados, que es la longitud (S.M.D.). Otra para medir los ángulos, que lo haremos en un sistema sexagesimal; es decir, los grados sexagesimales (base 60).

En un triángulo los lados se representan con minúsculas y los vértices opuestos con las correspondientes mayúsculas.



Los ángulos toman el nombre del vértice correspondiente.

Los ángulos están ordenados en su tamaño igual que lo están los lados

$$\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$$

$$b < c < a$$

Es decir, al ángulo mayor le corresponde el lado mayor y así sucesivamente.

Para medir los triángulos de gran dimensión (agrimensura) se utilizan cintas métricas, para los lados, y taquímetros para los ángulos.

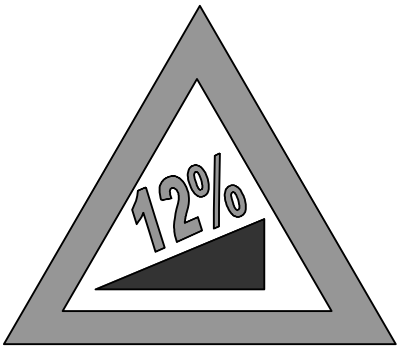
Bajo qué ángulo se vería el ancho de esta hoja (21 cm) si lo alejásemos 40 km de distancia. (Comparar con un parsec)

Medidas angulares: astronomía, topografía, geografía,…

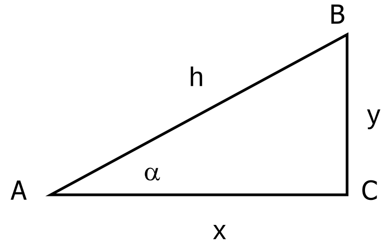
Las medidas angulares provienen de la observación astronómica. Es decir, objetos no accesibles. Sistema de numeración totalmente diferente. El objeto de este tema es ver la relación que guardan con las medidas longitudinales.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS ÁNGULO AGUDO –SEÑAL DE TRÁFICO- EMPEZAR POR AQUÍ-

La señal de tráfico es muy interesante como introducción: razón / trigonométrica. Es el ángulo el que determina la razón. No depende de lo grande que sea el triángulo.



En un triángulo rectángulo podemos definir unas razones de proporcionalidad entre sus lados que han recibido los siguientes nombres:

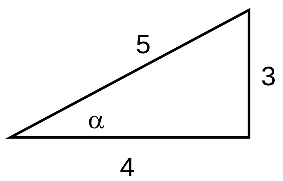


$$\cos\alpha = \frac{cat.contiguo}{hipotenusa} = \frac{x}{h}; \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{cat.opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{h}; \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{cat.opuesto}{cat.contiguo} = \frac{y}{x}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{hipot}{cat.cont} = \frac{h}{x}; \ \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{hipot}{cat.op} = \frac{h}{y}; \ \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{cat.cont}{cat.op} = \frac{x}{y}$$

Por la semejanza de triángulos no dependen del triángulo elegido sino tan sólo del ángulo agudo considerado. Por eso son razones de proporcionalidad y no medidas absolutas.

Ejemplo 1. – Según lo anterior calcula las razones trigonométricas del siguiente ángulo. Recordar terna pitagórica.
Después pedir el ángulo a través de la calculadora. Se puede repasar lo de D, R y G.
Ejemplo 2.- Utilizar el cartabón para hallar las razones de 30º y 60º así se prepara la tabla de razones elementales.



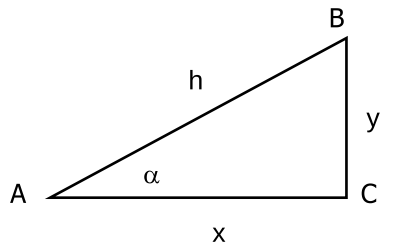
RAZONES ELEMENTALES

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Expresan ciertas relaciones que existen entre las razones trigonométricas. Salen de Pitágoras.

Haremos las deducciones para un triángulo rectángulo cualquiera:



1. Por la definición de la tangente

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

2. Por la definición del coseno y del seno:

$$(\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2 = 1$$

Basta aplicar el teorema de Pitágoras.

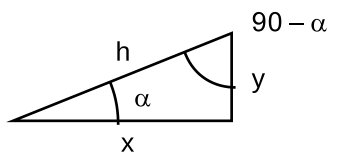
3. Finalmente:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha$$

Dem:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2 x$$

4. Por ángulos complementarios



$$\text{sen}\,(90 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\,(90 - \alpha) = \text{sen}\alpha$$

Resumiendo:

$(\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2 = 1$	$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$	$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha$	$\text{sen}\,(90 - \alpha) = \cos\alpha$ $\cos\,(90 - \alpha) = \text{sen}\alpha$

Estas fórmulas me permiten deducir cualquiera de las razones trigonométricas conocida una de ellas. Veámoslo en los siguientes ejercicios.

Ejercicios: Mirar los del libro
1. cos x =0'6, hallar el seno y la tangente de este ángulo.
2. tg x =1, hallar el resto de las razones.

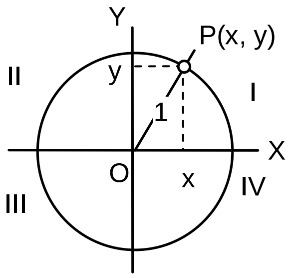
2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA (0º A 360º)

Se llama circunferencia goniométrica a la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de coordenadas.

Se establece como origen de ángulos el semieje OX^+ y como sentido positivo el contrario a las agujas del reloj. Por lo tanto, el sentido negativo será el conforme a las agujas del reloj.

Esta circunferencia queda dividida en 4 cuadrantes que van de 0° a 90°, 90° a 180°, 180° a 270° y 270° a 360° respectivamente.

Cualquier ángulo que tracemos sobre la circunferencia determina sobre ella un punto P(x, y)



cos α = Abscisa de P = x

sen α = Ordenada de P = y

tg $\alpha = \frac{y}{x}$

Según esto la evolución de las razones trigonométricas es como sigue:

Con esto basta, no hace falta calcular valores exactos. También se puede poner en cada cuadrante la fracción $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ según el signo que toma.

	0°	I	90°	II	180°	III	270°	IV	360°
sen	0	+	1	+	0	–	–1	–	0
cos	1	+	0	–	–1	–	0	+	1
tg	0	+	∄	–	0	+	∄	–	0

Ejemplos.

Hallar las razones:

a/ $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ y $\alpha \in \text{II}$

b/ $\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ y $\alpha \in \text{III}$

c/ $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ y $\alpha \in \text{III}$

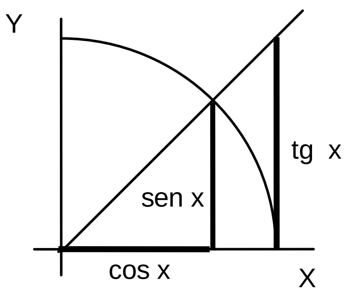
SEGMENTOS ASOCIADOS A CADA RAZÓN

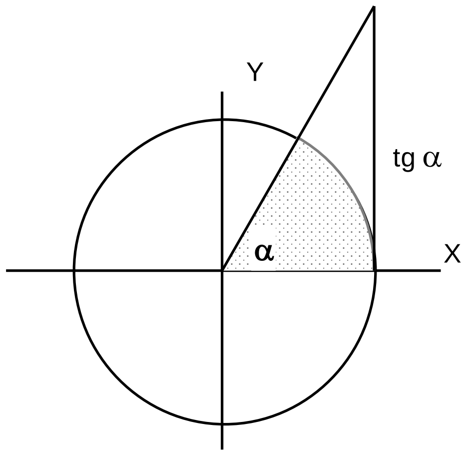
Los que tienen el seno y el coseno son evidentes por la definición.

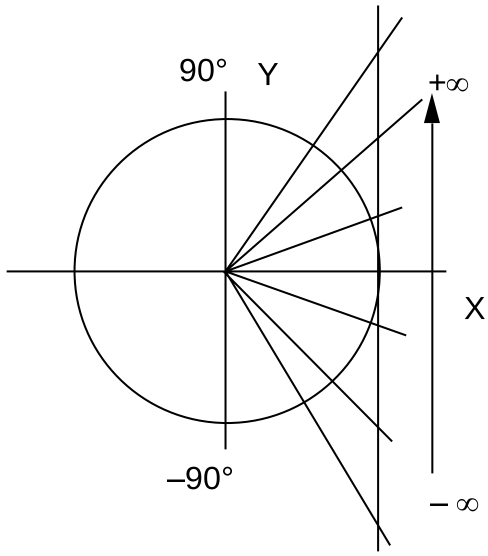
Para la tangente también existe un segmento asociado bastante elemental.

Es el segmento que une el punto x = 1 con la prolongación del ángulo hasta cortar a la tangente a la circunferencia por el punto anterior. La evolución de la tangente varía desde –∞ hasta +∞ según se muestra en la figura de la derecha.

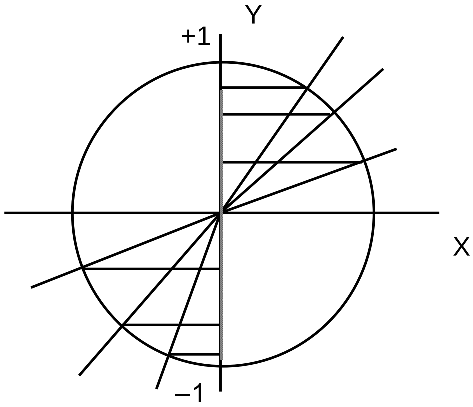
En un mismo gráfico:

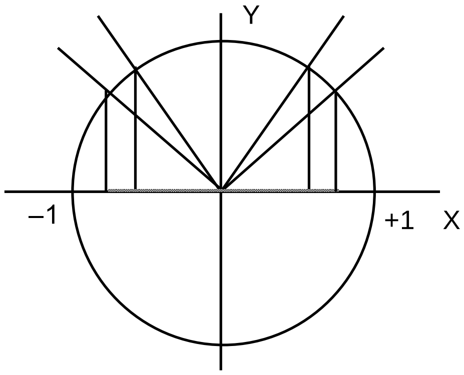




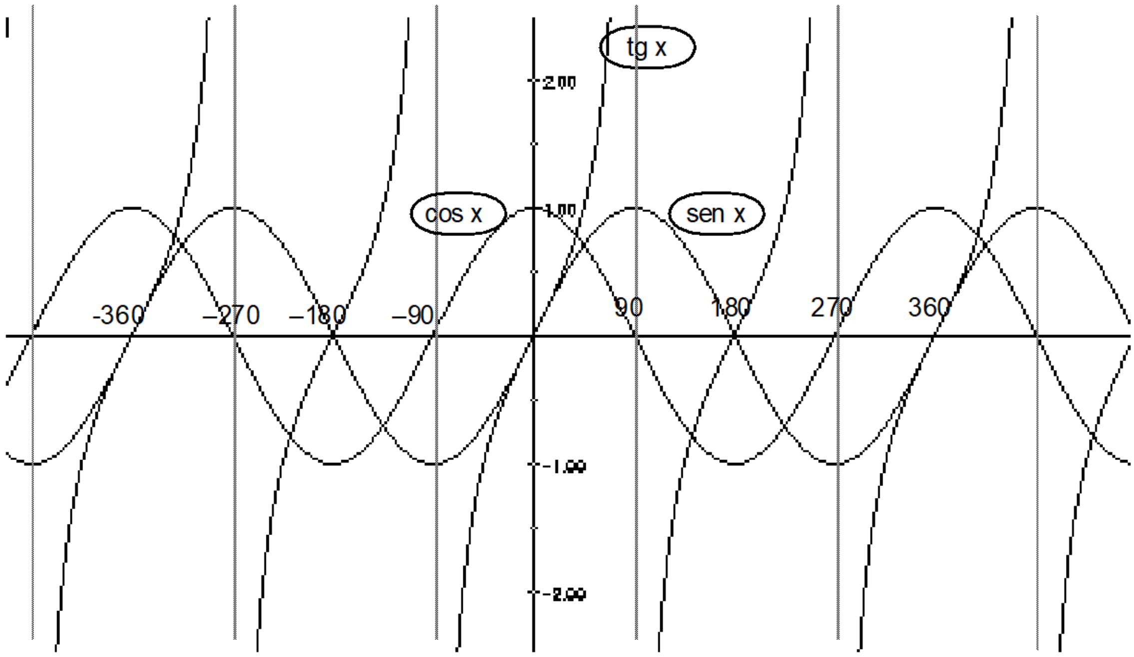


Sin embargo el seno y el coseno varían sólo entre –1 y 1.





En los tres casos los valores se repiten periódicamente. Con Geogebra queda bien esto.



3. RAZONES DE ÁNGULOS NEGATIVOS Y SUPERIORES A 360º

La separación entre dos semirrectas se agota en los 360º, pero podemos extender el concepto de ángulo considerando el giro de un punto sobre una circunferencia goniométrica. Es decir, centrada en el origen y de radio 1.

Sentido positivo al contrario al de las agujas del reloj. Levógiro (a izquierdas)

Sentido negativo el de las agujas del reloj. Dextrógiro (a derechas)

Todo ángulo se puede considerar como uno entre 0º y 360º más un número de vueltas.

El ángulo equivalente a uno mayor de 360° es el resto de dividir entre 360° dicho ángulo.

A uno negativo podemos sumarle un múltiplo adecuado de 360º.

Ángulos asociados

Son los que tienen las mismas coordenadas en la circunferencia goniométrica. Por lo tanto tienen las mismas razones trigonométricas.

P. ej. hallar ángulos asociados a 50º. Basta sumar o restar múltiplos de 360º.

Intervalo fundamental (engloba un ciclo completo)

Podemos considerar dos:

[0; 360); o bien (-180; 180]

Ejemplos.

Hallar los ángulos asociados del intervalo fundamental a 2150º; 2230º; -120º; -450º; -1060º.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CALCULADORA

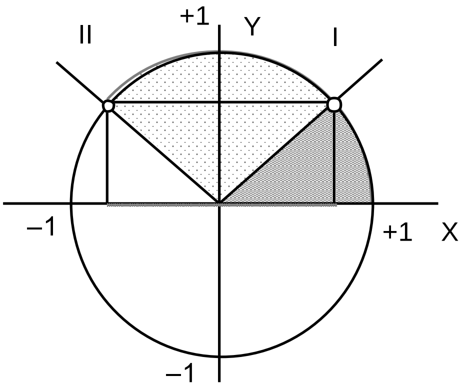
1. Tres unidades: DEG. RAD. GRA.
2. Cómo introducir el ángulo sexagesimal en la calculadora y su paso a decimal y viceversa.
3. Razones de un ángulo
4. Inversas de las razones.
5. Cálculo de una razón conocida otra.

4. RELACIONES ENTRE LOS CUADRANTES

Basta con la relación, no hace falta dar valores exactos.

I y II. Suplementarios

La relación es entre ángulos suplementarios. El ángulo $\alpha \in$ II.



$\text{sen } \alpha = \text{sen } (180 - \alpha)$
$\cos \alpha = -\cos (180 - \alpha)$
$\text{tg } \alpha = -\text{tg } (180 - \alpha)$

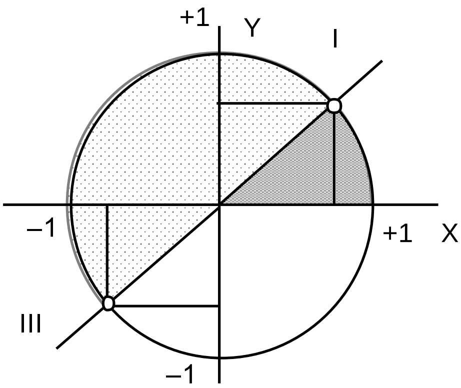
sen 160° =

cos 145° =

tg 110° =

I Y III. Difieren en 180º

Aquí el ángulo $\alpha \in \text{III}$



$\text{sen } \alpha = -\text{sen } (\alpha - 180)$
$\cos \alpha = -\cos (\alpha - 180)$
$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha - 180)$

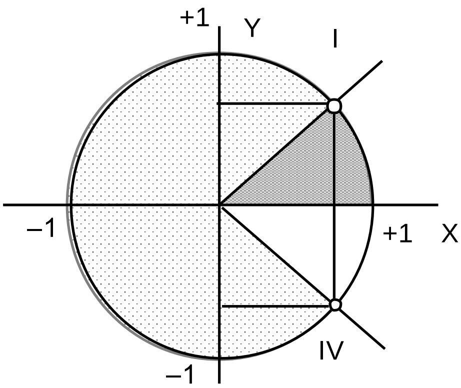
sen 250° =

cos 260° =

tg 190° =

I Y IV. Opuestos

Finalmente el ángulo $\alpha \in \text{IV}$



$\text{sen } \alpha = -\text{sen } (360 - \alpha)$
$\cos \alpha = \cos (360 - \alpha)$
$\text{tg } \alpha = -\text{tg } (360 - \alpha)$

$\text{sen } -\alpha = -\text{sen } \alpha$

$\cos -\alpha = \cos \alpha$
$\text{tg } -\alpha = -\text{tg } \alpha$

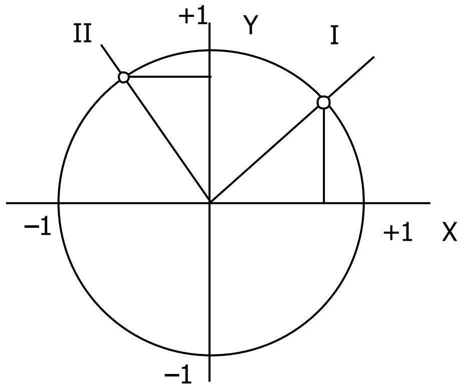
sen 350° =

cos −300° =

tg 290° =

Ángulos que difieren en 90º:

Se pueden deducir a partir de las relaciones del segundo cuadrante. Es redundante este apartado. No hace falta verlo.



cos (α+90) = -sen α
sen (α+90)=cos α
tg(α+90)= = −1/ tg α

Ángulos complementarios

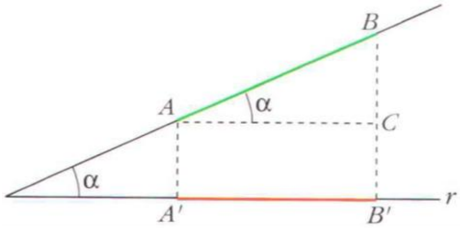
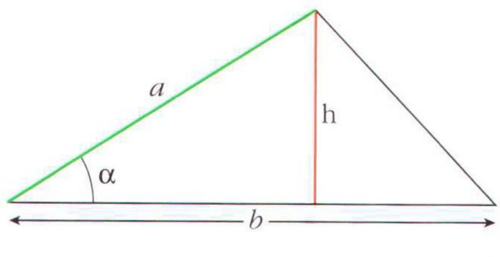
Ya está visto.

5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Podemos hacer los siguientes ejercicios. No hace falta explicar nada:

1. La rampa de acceso a un edificio tiene un ángulo de 15º y salva un desnivel de 5m de altura. ¿Qué longitud tiene, cuánto mide su base?
2. El hilo de una cometa forma un ángulo de 80º con la horizontal y tiene una longitud de 200 m. ¿A qué altura se ha elevado?
3. Un tejado tiene 5m de altura y 20m de base. ¿Qué ángulo forma con la horizontal?
4. Un decágono de 5m de lado, ¿qué área tiene?

ALGUNOS RESULTADOS ÚTILES.

Proyección de un segmento sobre otro: $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$	
Altura de un triángulo h = a · sen α.	
Área de un triángulo $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\alpha$	
Fórmula de Herón $S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$	

Ejemplos

1. Un triángulo está formado por dos lados de 5m y 3m que forman un ángulo de 20º entre sí. Hallar su altura sobre el lado de 5m.
2. Hallar la superficie del triángulo anterior.

6. RESOLUCIÓN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

MÉTODO DE LAS TANGENTES. CÁLCULO DE ALTURA DE OBJETOS DE BASE INNACESIBLE

Es útil cuando conocemos dos ángulos y un lado.

Por ejemplo, resolver:

1. Desde un punto vemos un monte bajo un ángulo de 50º y alejándonos 100m el ángulo se reduce a 40º. ¿Qué altura tiene?
2. Resolver el triángulo de base 100 m y ángulos sobre dicha base de 30º y 40º.

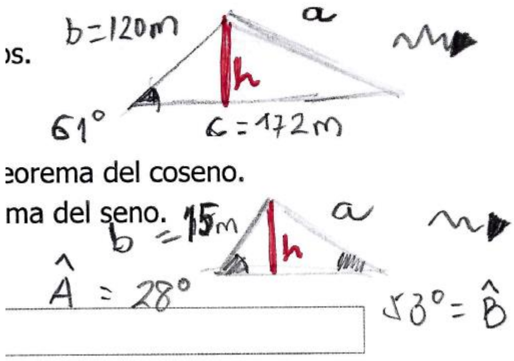
MÉTODO DE LA ALTURA.

La clave es convertir el triángulo en dos triángulos rectángulos.

Repasar elementos que definen un triángulo.

Por ejemplo, resolver:

1. b=120m; c=172m y A=61º. Hallar 'a'. Fundamento del teorema del coseno.
2. b=15m; A=28º; B=53º. Hallar 'a'. Fundamento del teorema del seno.



7. RESOLUCIÓN TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

TEOREMA

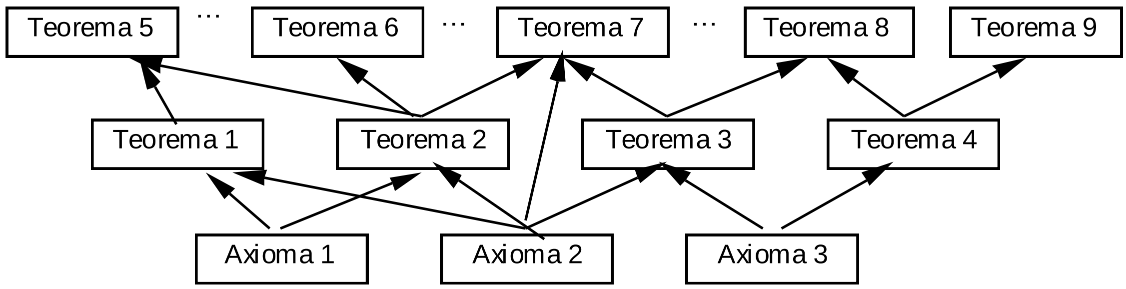
Deducción lógica de una proposición a partir de otras proposiciones ya establecidas.

Decimos deducción lógica; es decir, mediante razonamientos.

Una deducción experimental es la que se basa en la experiencia. Por ejemplo, el agua hierve a 100° C. En esta deducción hay unos resultados previos también. Por ejemplo, la dilatación de los cuerpos con la temperatura (fundamento del termómetro)

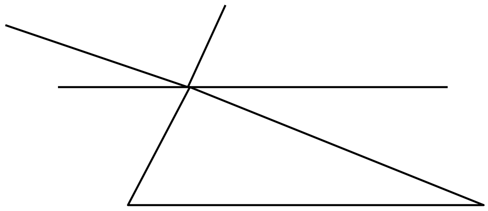
AXIOMA

Verdad evidente o que no necesita demostración. Proposición admitida sin demostración. Primeros fundamentos de una ciencia.



Ejemplo

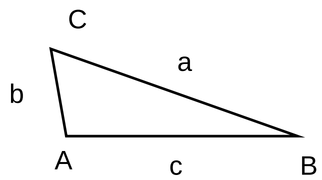
La suma de los ángulos de un triángulo es de 180°. Ir diciendo axiomas que usamos.



Correspondencia entre lados y ángulos

En un triángulo al lado mayor le corresponde el ángulo mayor y al lado menor el menor.

Es decir, los lados están ordenados en la misma forma que los ángulos. Pero ojo, no en una relación de proporcionalidad directa.



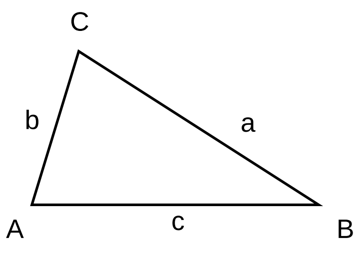
$$\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$$

$$b < c < a$$

Coger demostración de apuntes atrasados.

TEOREMA DE LOS SENOS

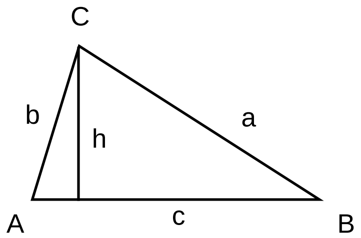
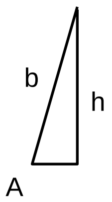
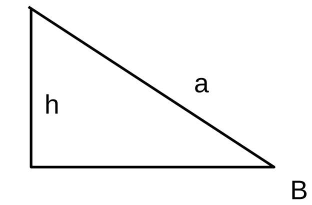
Para cualquier triángulo se cumple:



$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

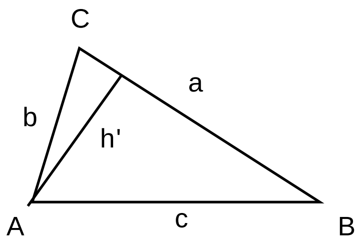
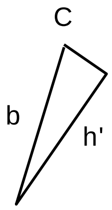
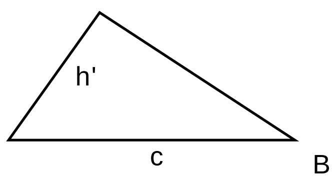
DEM

Trazando la altura por uno de sus vértices se forman dos triángulos rectángulos

		
Por las razones trigonométricas:	$\text{sen}A = \frac{h}{b}$; $h = b \cdot \text{sen}A$	$\text{sen}B = \frac{h}{a}$; $h = a \cdot \text{sen}B$

Luego, a · senB = b · senA. Por lo tanto, $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$

Tomando otra altura completaríamos la fórmula:

		
Por las razones trigonométricas:	$\text{sen}C = \frac{h'}{b}$; $h' = b \cdot \text{sen}C$	$\text{sen}B = \frac{h'}{c}$; $h' = c \cdot \text{sen}B$

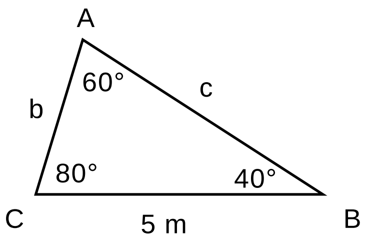
Luego, b · senC = c · senB. Por lo tanto, $\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$

Uniendo ambas igualdades obtenemos el resultado requerido.

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Ejemplo.–

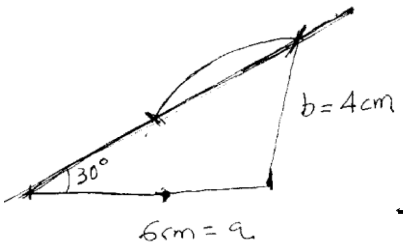
Vamos a resolver el triángulo siguiente apoyándonos en el teorema de los senos

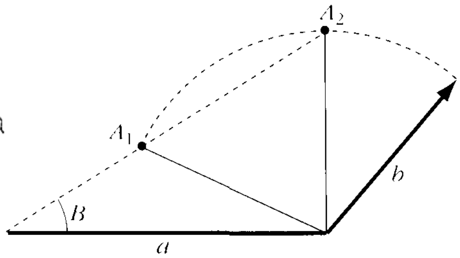


$$\frac{5\text{m}}{\text{sen } 60°} = \frac{b}{\text{sen } 40°} = \frac{c}{\text{sen } 80°}$$

Ejemplo.- Con dos soluciones.

Sean los datos a=6cm; b=4cm y B = 30º.



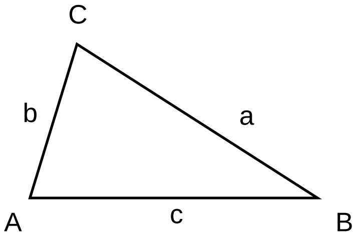


Hacer el dibujo para verlo.

Observar cómo hay casos en que pueden existir dos soluciones.

TEOREMA DEL COSENO

Para cualquier triángulo se cumple:



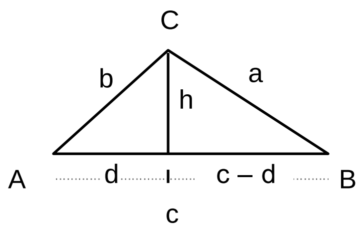
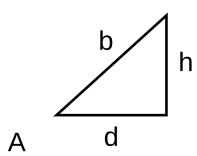
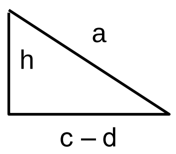
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

DEM

Trazando la altura por uno de sus vértices se forman dos triángulos rectángulos

		
Por las razones trigonométricas y Pitágoras:	$\text{sen}A = \frac{h}{b}$; $h = b \cdot \text{sen}A$ $\cos A = \frac{d}{b}$; $d = b \cdot \cos A$	$a^2 = h^2 + (c - d)^2$

Sustituyendo h y d en la segunda expresión concluimos nuestra demostración.

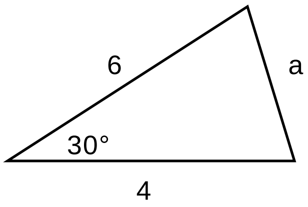
Observar que en el caso de que tengamos como datos los tres lados del triángulo a, b y c, el triángulo es único por un lado. Pero a la hora de resolverlo supongamos que hallamos el ángulo α; es decir, el correspondiente al lado a. Y ahora por el teorema del seno, utilizando a, b y α, hallamos el ángulo β. Podríamos tener una doble solución (ver el caso anterior); sin embargo no sería correcta en este caso. Esto es debido a que no estamos considerando el lado "c" que es un dato y haría incorrecta una de las soluciones.

Una manera de arreglar esto es comprobar los dos casos posibles.

Otra es viendo previamente si el triángulo es obtusángulo o acutángulo, tomando como criterio la relación pitagórica.

Cuando usamos el teorema del coseno es mejor hallar todos los elementos con él y así evitamos la ambigüedad falsa –en este caso- del teorema del seno.

Ejemplo.– Resolver el siguiente triángulo:



$$a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 30$$

Ejemplo.- Resolver el triángulo de lados 6 cm, 7’2 cm y 3’5 cm.

8. APÉNDICE

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO

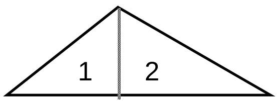
• Un triángulo viene definido:

1. Tres lados.
2. Dos lados y el ángulo entre ellos.
3. Un lado y dos ángulos.

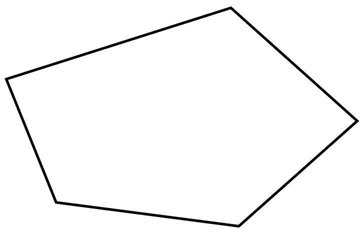
Es indeformable. Ello es debido a que con tres lados existe un único triángulo.

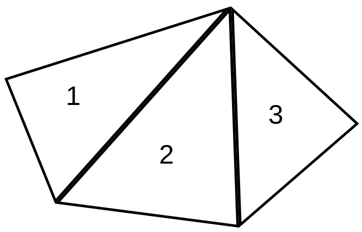
• La suma de dos de sus lados siempre es mayor que el tercero. De lo contrario no se podría construir.

• Todo triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos. Basta trazar una de sus alturas.



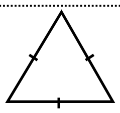
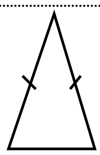
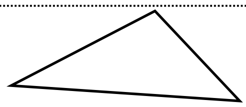
• Todo polígono se puede descomponer en triángulos. Este proceso se llama triangulación.



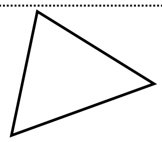
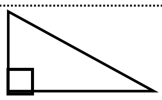
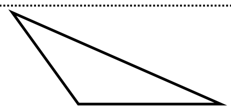


TIPOS DE TRIANGULOS

Según los lados

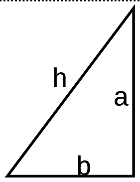
Equilátero	**Isósceles**	**Escaleno**
Tres lados iguales	Dos lados iguales	Tres lados desiguales
Tres ángulos iguales	Dos ángulos iguales	Tres ángulos diferentes
		

Según los ángulos

Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Tres ángulos agudos	Un ángulo recto	Un ángulo obtuso
		

RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO

Pitágoras



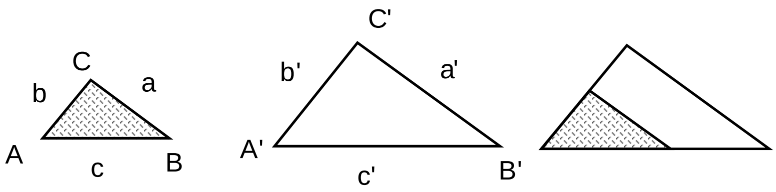
$$a^2 + b^2 = h^2$$

a, b y h forman una terna pitagórica.

Tales

Si cortamos dos rectas por paralelas los segmentos que se forman son proporcionales

• $\hat{A} = \hat{A}'$ $\quad \hat{B} = \hat{B}'$ $\quad \hat{C} = \hat{C}'$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$



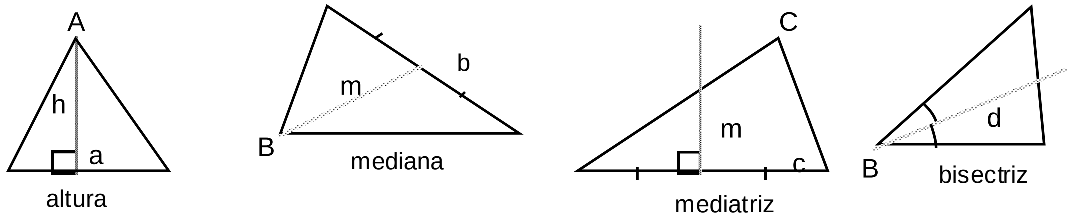
• Todos los cartabones son semejantes.

• Medida por la sombra.

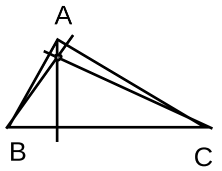
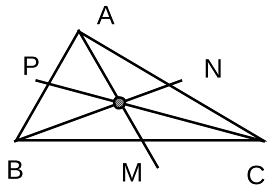
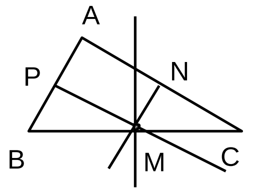
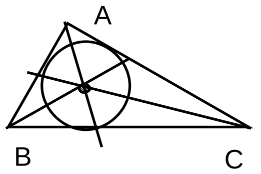
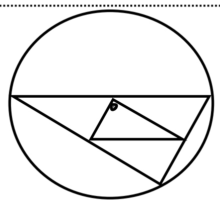
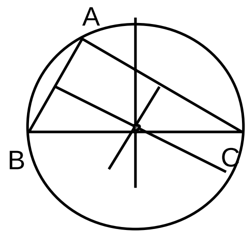
• Las razones trigonométricas son por eso universales. No dependen del triángulo en cuestión.

• Pitágoras se puede utilizar para trazar perpendiculares.

SEGMENTOS, O RECTAS, NOTABLES EN UN TRIÁNGULO



Perpendicular por un vértice a la base opuesta.	Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.	Perpendicular por el punto medio de un lado	Semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

 Ortocentro	 Baricentro	 Circuncentro	 Incentro
	Centro de gravedad o masas del triángulo		Centro de la circunferencia inscrita.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

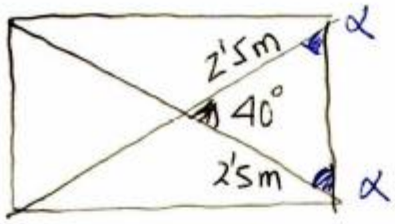
1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CALCULADORA

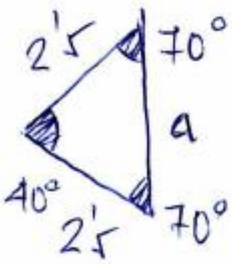
3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1. Calcular el área de un decágono (polígono de 10 lados) regular de 5 cm de lado.
SOL: Sol: apotema = 7,7. Área 192,36 cm^2.
Sol: a=7,7. Área 192,36 cm^2.

2. Las diagonales de un rectángulo forman un ángulo de 40º y miden 5m. ¿Cuánto valen los lados del rectángulo?

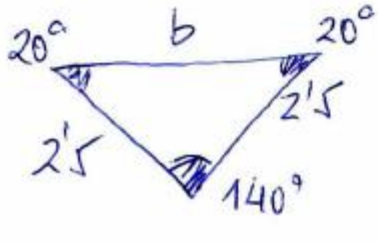


$$180-40 = 2\cdot\alpha \; ; \; 140 = 2\cdot\alpha \; ; \; \alpha = \frac{140}{2} = 70^\circ$$



$$\frac{a}{\text{sen}\,40} = \frac{2'5}{\text{sen}\,70^\circ} \; ;$$

$$a = \frac{2'5 \cdot \text{sen}\,40^\circ}{\text{sen}\,70^\circ} = \boxed{1'71\,m}$$



$$\frac{b}{\text{sen}\,140^\circ} = \frac{2'5}{\text{sen}\,20^\circ}$$

$$b = \frac{2'5 \cdot \text{sen}\,140^\circ}{\text{sen}\,20^\circ} = \boxed{4'70\,m}$$

4. AMPLIACIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO

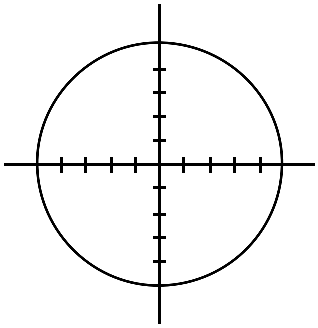
4. RELACIONES ENTRE LOS CUADRANTES

3. Contesta a los siguientes apartados. El dibujo es orientativo, debes hacer el tuyo propio en la hoja de respuestas:

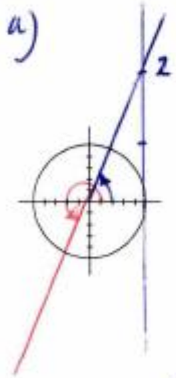
1°. Dibuja sobre la circunferencia goniométrica los ángulos que tengan tg α = 2.

2°. Hallar el valor exacto del resto de las razones trigonométricas de dichos ángulos.

3°. Obtener con la calculadora el valor de dichos ángulos en grados, minutos y segundos.



a)



b) $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha$; $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+2^2=5$;

$\frac{1}{\cos^2\alpha}=5$; $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}=\boxed{\pm\frac{\sqrt{5}}{5}}$

$tg\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$; $sen\alpha=\cos\alpha\cdot tg\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot 2=\boxed{\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

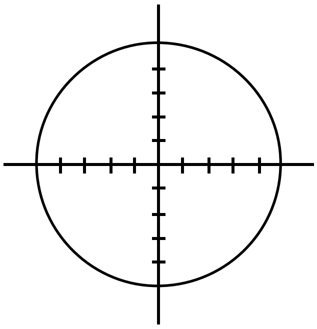
c) $\boxed{63'43° = 1'11 \text{ rad}}$

$\boxed{243'43° = 4'25 \text{ rad}}$.

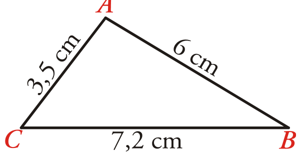
4. 1°. Dibuja sobre la circunferencia goniométrica los ángulos cuyo sen α = −0'6.

2°. Hallar el valor exacto del resto de las razones trigonométricas.

3°. Calcular dichos ángulos.



5. Calcula los ángulos del siguiente triángulo. Después calcula su superficie.



SOL: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

$51{,}84 = 12{,}25 + 36 - 42\cos\hat{A}$

$42 cos A = 12,25 + 36 - 51,84$

$42 cos \hat{A} = -3,59$

$cos \hat{A} = -0,085 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 94^\circ\ 54'12''$

$\hat{B} = 28^\circ\ 58'7''$

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 56^\circ\ 7'41''$

Por tanto:

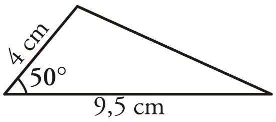
$a = 7,2 \text{ cm}; \ \hat{A} = 94^\circ\ 54'12''$

$b = 3,5 \text{ cm}; \ \hat{B} = 28^\circ\ 58'7''$

$c = 6 \text{ cm}; \ \hat{C} = 56^\circ\ 7'41''$

Superficie: 10,46 cm^2

6. Resuelve este triángulo, es decir, halla sus lados y sus ángulos:



SOL: Hallamos el lado c con el teorema del coseno:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab cos \hat{C}$

$c^2 = 9,5^2 + 4^2 - 2 \cdot 9,5 \cdot 4 \cdot cos 50^\circ$

$c^2 = 90,25 + 16 - 48,85$

$c^2 = 57,4 \quad \rightarrow \quad c = 7,58 \text{ cm}$

Como conocemos los tres lados, la solución es única.

Hallamos el ángulo $\hat{A}$:

$$\frac{a}{sen \hat{A}} = \frac{c}{sen \hat{C}} \quad \rightarrow \quad \frac{9,5}{sen \hat{A}} = \frac{7,58}{sen 50^\circ} \quad \rightarrow \quad sen \hat{A} = \frac{9,5 sen 50^\circ}{7,58}$$

$sen \hat{A} = 0,96 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 73^\circ\ 45'24''$

$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 56^\circ\ 14'36''$

Por tanto:

$a = 9,5 \text{ cm}; \ \hat{A} = 73^\circ\ 45'24''$

$b = 4 \text{ cm}; \ \hat{B} = 56^\circ\ 14'36''$

$c = 7,58 \text{ cm}; \ \hat{C} = 50^\circ$

7. Se sabe que las dos diagonales de un paralelogramo miden 8m y 12m respectivamente formando un ángulo de 60º entre ellas. Determinar el valor de los lados del paralelogramo.

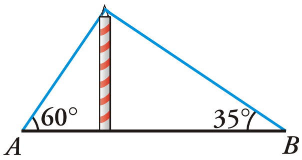
Ayuda.- Las diagonales se cortan en su punto medio. El ángulo de 60º es el menor de los dos ángulos que determinan al cortarse.

SOL: Sol: 5,29; 8,71. Los ángulos son 64º y 116º.

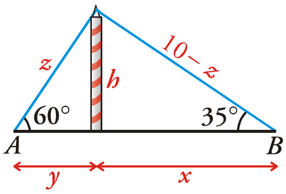
8. Para sujetar un mástil al suelo mediante 2 tensores, como indica la figura, hemos necesitado 10 metros de cable.

a) Halla la altura del mástil.

b) La distancia entre los puntos A y B.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} sen\,60^\circ = \dfrac{h}{z} \\ sen\,35^\circ = \dfrac{h}{10-z} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z\,sen\,60^\circ = h \\ (10-z)\,sen\,35^\circ = h \end{array}\right\}$$

$$z\,sen\,60^\circ = (10-z)\,sen\,35^\circ \quad \rightarrow \quad z\,sen\,60^\circ = 10\,sen\,35^\circ - z\,sen\,35^\circ$$

$$z\,sen\,60^\circ + z\,sen\,35^\circ = 10\,sen\,35^\circ \quad \rightarrow \quad z(sen\,60^\circ + sen\,35^\circ) = 10\,sen\,35^\circ$$

$$z = \frac{10\,sen\,35^\circ}{sen\,60^\circ + sen\,35^\circ} = 3,98 \text{ m}$$

$$h = z\,sen\,60^\circ = \frac{10\,sen\,35^\circ\,sen\,60^\circ}{sen\,60^\circ + sen\,35^\circ} = 3,45 \text{ m}$$

La altura del mástil es de 3,45 m

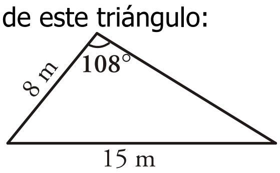
Para hallar la distancia entre A y B, tenemos que hallar x e y:

$$tg\,60^\circ = \frac{h}{y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{h}{tg\,60^\circ} = \frac{3,45}{tg\,60^\circ} = 1,99 \text{ m}$$

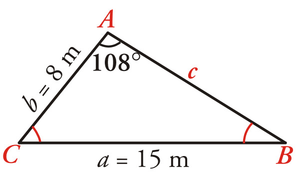
$$tg\,35^\circ = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{tg\,35^\circ} = \frac{3,45}{tg\,35^\circ} = 4,93 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre A y B es de $x + y = 4,93 + 1,99 = 6,92$ m.

9. Halla los lados y los ángulos de este triángulo:



Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{15}{sen\,108^\circ} = \frac{8}{sen\,\hat{B}}$$

$$sen\,\hat{B} = \frac{8\,sen\,108^\circ}{15} = 0,507 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 30^\circ\,28'\,46''$$

(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos, solo hay una relación).

Hallamos el ángulo $\hat{C}$:

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 41^\circ\, 31'14''$

Calculamos el lado c:

$$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{a}{sen\hat{A}} \rightarrow \frac{c}{sen(41^\circ\, 31'14'')} = \frac{15}{sen108^\circ} \rightarrow c = 10,46 \text{ m}$$

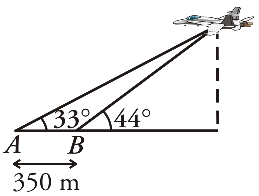
Por tanto:

$a = 15$ m; $\hat{A} = 108^\circ$

$b = 8$ m; $\hat{B} = 30^\circ\, 28'46''$

$c = 10,46$ m; $\hat{C} = 41^\circ\, 31'14''$

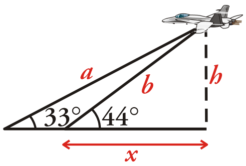
10. En un determinado momento un avión se encuentra situado con respecto a dos puntos como muestra la figura:



a) Halla las distancias del avión a los puntos A y B.

b) La altura a la que se encuentra en dicho instante.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} tg\,44^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg\,33^\circ = \dfrac{h}{350+x} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x\,tg\,44^\circ = h \\ (350+x)tg\,33^\circ = h \end{array}\right\}$$

$x\,tg\,44^\circ = (350+x)tg\,33^\circ$

$x\,tg\,44^\circ = 350\,tg\,33^\circ + x\,tg\,33^\circ$

$x\,tg\,44^\circ - x\,tg\,33^\circ = 350\,tg\,33^\circ \rightarrow x(tg\,44^\circ - tg\,33^\circ) = 350\,tg\,33^\circ$

$$x = \frac{350\,tg\,33^\circ}{tg\,44^\circ - tg\,33^\circ} = 718,64 \text{ m}$$

$$h = x\,tg\,44^\circ = \frac{350\,tg\,33^\circ\, tg\,44^\circ}{tg\,44^\circ - tg\,33^\circ} = 693,98 \text{ m}$$

El avión se encuentra a 693,98 m de altura.

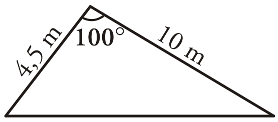
Por otra parte:

$$sen\,44^\circ = \frac{h}{b} \rightarrow b = \frac{h}{sen\,44^\circ} = \frac{693,98}{sen\,44^\circ} = 999,02 \text{ m}$$

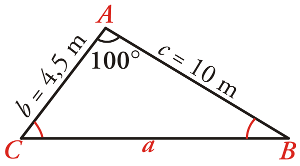
$$sen\,33^\circ = \frac{h}{a} \rightarrow a = \frac{h}{sen\,33^\circ} = \frac{693,98}{sen\,33^\circ} = 1274,20 \text{ m}$$

El avión está a 1274,20 metros de A y a 999,02 metros de B.

11. Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla sus lados y sus ángulos:



Solución:



Hallamos el lado a con el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$a^2 = 4,5^2 + 10^2 - 2\cdot 4,5\cdot 10\cdot \cos 100^\circ$$

$$a^2 = 20,25 + 100 + 15,63$$

$$a^2 = 135,88$$

$$a = 11,66 \text{ m}$$

Al conocer los tres lados, la solución es única.

Calculamos el ángulo $\hat{B}$ aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{11,66}{sen100^\circ} = \frac{4,5}{sen\hat{B}} \quad \rightarrow \quad sen\hat{B} = \frac{4,5\cdot sen100^\circ}{11,66}$$

$$sen\hat{B} = 0,380 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 22^\circ\, 20'17''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 57^\circ\, 39'43''$$

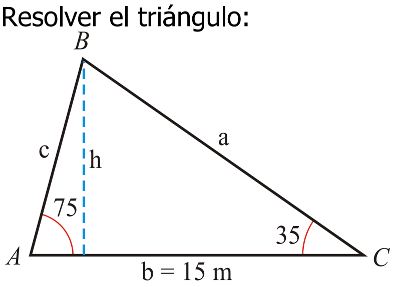
Por tanto:

$a = 11,66$ m; $\hat{A} = 100^\circ$

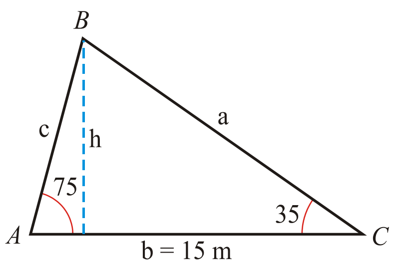
$b = 4,5$ m; $\hat{B} = 22^\circ\, 20'17''$

$c = 10$ m; $\hat{C} = 57^\circ\, 39'43''$

12. Resolver el triángulo:



SOLUCIÓN:



• El ángulo $\hat{B}$ *lo* obtenemos así :

$\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 70^\circ$

• Aplicamos el teorema de los senos para hallar los otros dos lados:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \quad \to \quad \frac{a}{sen75^\circ} = \frac{15}{sen70^\circ} = \frac{c}{sen35^\circ} \quad \to$$

$$\to \quad a = \frac{15sen75^\circ}{sen70^\circ} = 15{,}42 \text{ m} \quad \text{y} \quad c = \frac{15sen35^\circ}{sen70^\circ} = 9{,}16 \text{ m}$$

• Hallamos la altura correspondiente al vértice B:

$$sen75^\circ = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c \cdot sen75^\circ = 9{,}16 \cdot sen75^\circ = 8{,}85 \text{ m}$$